Resumen de MTP2 (Versión Final)

Roberto Luis Bisbé

31 de Enero de 2010

Abstract

Este documento pretende ser una ayuda para la preparación del examen, ha sido elaborado con la ayuda de varias personas, aunque en ningún momento ha estado relacionada su preparación con el personal docente de la UAM, por lo que no se debería usar como única referencia para el estudio.

1 Definiciones básicas

f = o(g) si:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} \to \emptyset$$

f = O(g) si:

$$\exists N_0, C \text{ tales que } \forall N \geq N_0 \text{ se cumple que :}$$
$$f(N) \leq C \cdot g(N)$$

Una aclaración importante

$$f = o(g) \Longrightarrow f = O(g)$$
$$f = O(g) \not\Longrightarrow f = o(g)$$

f = Ω (g) si: g = O(f)

f = Θ (g) si:

$$\text{Se cumple } f = O(g) \to g = \Omega(f) \text{ y } f = \Omega(g) \to g = O(f)$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} = L \neq \emptyset$$

f $\simeq$ g (f es asintóticamente equivalente a g) si:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f(N)}{g(N)} \to 1$$

f = g + O(h) si:

$$h = o(g) \text{ y } |f - g| = O(h)$$

2 Algoritmos de ordenación

Equiprobabilidad:

$$P = \frac{1}{N!}$$

Casos mejor, peor y medio:

$$\text{Caso Peor:} W_A(N) = \max\{n_A(I) : I \in E_A(N)\}$$

$$\text{Caso Mejor:} B_A(N) = \max\{n_A(I) : I \in E_A(N)\}$$

$$\text{Caso Medio:} A_A(N) = \sum_{I \in E_A(N)} \{n_A(I) \cdot p(I)\}$$

Para hallar el caso medio

$$A_A^e = \frac{S_N}{C_N}$$

2.1 Algoritmos de ordenación local

2.1.1 InsertSort, BubbleSort, SelectSort

Caso peor:

$$W_{IS}(N) \leq \frac{N^2}{2} + O(N)$$

Caso mejor:

$$B_{IS}(N) = N - 1$$

Caso medio:

$$A_{IS}(N) = \frac{N^2}{4} + O(N)$$

2.2 Algoritmos Shell

2.2.1 ShellSort

Caso peor:

$$W_{SS}(N) = N^x + O(N); 1 \leq x \leq 2$$

Caso medio:

$$A_{SS}(N) = N^x + O(N); 1 \leq x \leq 2$$

2.3 Algoritmos divide y vencerás

2.3.1 MergeSort

Caso peor(recursivo):

$$W_{MS}(N) \leq N - 1 + W_{MS}\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil\right) + W_{MS}\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right)$$

Caso peor(término general):

$$W_{MS}(N) \leq N \log N + O(N)$$

Caso mejor(recursivo):

$$B_{MS}(N) \leq B_{MS}\left(\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil\right) + B_{MS}\left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor\right)$$

Caso mejor(término general):

$$B_{MS}(N) \geq \frac{N}{2} \log N$$

Caso medio(término general):

$$A_{MS}(N) = 2N \log N + O(N)$$

2.3.2 QuickSort

Caso peor(recursivo):

$$W_{QS}(N) \leq N - 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \{W_{QS}(i-1) + W_{QS}(N-i)\}$$

Caso peor(término general):

$$W_{QS}(N) \leq \frac{N^2}{2} - \frac{N}{2}$$

Caso medio(recursivo):

$$A_{QS}(N) = N - 1 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \{A(i-1) + A(N-i)\}$$

Caso medio(término general):

$$A_{QS}(N) = 2N \log N + O(N)$$

Caso mejor(término general):

$$A_{QS}(N) = 2N \log N + O(N)$$

2.3.3 HeapSort

Caso peor:

$$W_{HS}(N) = \Theta(N \log N)$$

Caso medio:

$$A_{HS}(N) = \Theta(N \log N)$$

Profundidad en función de número de elementos:

$$prof(T) = \lfloor \log N \rfloor$$

2.4 Algoritmos de ordenación por diccionario

2.4.1 RadixSort

Caso peor:

$$W_{RS}(N) = O(KN + M)$$

Caso medio:

$$A_{RS}(N) = O(KN + M)$$

Caso mejor:

$$A_{RS}(N) = O(N)$$

2.5 Arboles de decisión

Número de hojas de un Árbol de decisión en función del número de elementos n:

$$N_{hojas} = n!$$

Árboles de decisión y casos peor y medio:

$$W_A(N) = \max_{\rho \in \sum_N} prof_{T_A^N}(H_\rho)$$

$$A_A(N) = \frac{1}{N!} \sum_{H \in T_A^N} prof_{T_A^N}(H)$$

3 Algoritmos de búsqueda

Equiprobabilidad (si consideramos que no esté el elemento):

$$P = \frac{1}{N+1}$$

Equiprobabilidad (en caso contrario):

$$P = \frac{1}{N}$$

3.1 Casos medios y cotas inferiores

Caso peor para algoritmos de búsqueda por cdc:

$$W_{BL}(N) = O(N)$$

Caso medio para algoritmos de búsqueda por cdc:

$$A_{BL}(N) = \Theta(\log(N))$$

3.2 AVL

3.2.1 Receta general para los desequilibrios

-2,-1	Rotación **Izquierda** en -1 (Hijo izq de -1 pasa a Hijo der de -2)
2,1	Rotación **Derecha** en 1 (Hijo der de -1 pasa a Hijo izq de -2)
-2,1	Rotación **Derecha**(en izquierda de 1).**Izquierda** (en -1)
2,-1	Rotación **Izquierda**(en derecha de -1).**Derecha** (en 1)

3.2.2 Número mínimo de elementos en función de la profundidad:

$$n_p = F_{p+2} - 1$$

$$n_p \simeq \frac{\Phi^3}{\sqrt{5}}\Phi^P - 1 \text{ Siendo } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

3.2.3 Profundidad en función de número de elementos:

$$prof(T) = \lfloor \log N \rfloor$$

4 Hashing

4.1 Construcción de funciones Hash

4.1.1 Hash de división

$$h(k) = k \mod m$$

4.1.2 Hash de multiplicación

$$0 \leq h(k) = \lfloor (m(k \cdot \Phi)\rfloor) \leq 1$$

() denota que tomamos solamente decimales

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ o bien } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

4.2 Fórmulas generales de éxito y fracaso

$$HDA : n^e(D_i, T) = n^f(D_i, T_i)$$

$$HE : n^e(D_i, T) = 1 + n^f(D_i, T_i)$$

4.3 Hash de encadenamiento

$$A^f_{BHE}(N,m) = \frac{N}{m} = \lambda = \text{factor de carga}$$
$$A^e_{BHE}(N,m) = 1 + \frac{\lambda}{2} + o(1)$$

4.4 Hash de direccionamiento abierto

4.4.1 Sondeos Aleatorios

$$A^f_{BHSA}(N,m) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$A^e_{BHSA}(N,m) = \frac{1}{\lambda}\log\frac{1}{1-\lambda}$$

4.4.2 Sondeos Lineales

$$A^f_{BHSL}(N,m) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\lambda)^2}\right)$$
$$A^e_{BHSL}(N,m) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-u)^2}\right)du = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\lambda}\right)$$

4.4.3 Para hallar el valor del caso de éxito sabiendo el caso de fracaso:

$$A^e(N,m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} A^f(N,m)$$

En general:

$$A^e_{BH}(N,m) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A^f_{BH}(N,m)$$

A Fórmulas para resolver recurrencias

A.1 Progresión aritmética:

$$\sum_{i=1}^{N-1} N - i = \sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2}$$

A.2 Progresión geométrica:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^i = \frac{x^n - x^{i_0}}{x-1} \quad \text{si } x > 1$$
$$\sum_{i=1}^{n-1} x^i = \frac{x}{1-x} \quad \text{si } x < 1$$

A.3 Otras progresiones útiles:

$$\sum_{i=1}^{N} i^k x^i = O(N^k x^N)$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Agradecimientos: Carlos Asensio, Ignacio Martín, Pablo Postigo y Carlos Puyuelo por las anotaciones y las correcciones.